

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- a) Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt, welche stimmen nicht? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils.
- Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} ist ein Alphabet.
 - $\Sigma^+ \cup \{\varepsilon\} = \Sigma^*$, für jedes Alphabet Σ .
 - Sind $a, b \in \Sigma$, $w_1 = abba$ und $w_2 = \varepsilon$. Dann ist $|w_1 w_2| = 5$
 - $G = (\{A, b, B, c, S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow AB, B \rightarrow b, B \rightarrow AA, b \rightarrow cc, A \rightarrow ab\}, S)$ ist eine gültige Grammatik.
- b) Sei Δ ein Alphabet. Wie viele Worte $w \in \Delta^*$ der Länge $|w| = k$ gibt es?
- c) Wie viele Worte $w \in \Delta^*$ der Länge $|w| \leq k$ gibt es?

Aufgabe 2: Gegeben sei die folgende Grammatik für arithmetische Ausdrücke aus der Vorlesung: $G := (V, \{0, 1, \dots, 9, +, -, *, \div, (\,)\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P := & \{S \rightarrow \langle \text{EXP} \rangle \mid \varepsilon, \\ & \langle \text{EXP} \rangle \rightarrow \langle \text{NAT} \rangle \mid \langle \text{EXP} \rangle \langle \text{OP} \rangle \langle \text{EXP} \rangle \mid (\langle \text{EXP} \rangle), \\ & \langle \text{NAT} \rangle \rightarrow \langle \text{DIG} \rangle \langle \text{NAT} \rangle \mid \langle \text{DIG} \rangle, \\ & \langle \text{DIG} \rangle \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9, \\ & \langle \text{OP} \rangle \rightarrow + \mid - \mid * \mid \div \} \end{aligned}$$

und $V = \{S, \langle \text{EXP} \rangle, \langle \text{OP} \rangle, \langle \text{NAT} \rangle, \langle \text{DIG} \rangle\}$.

Erweitern Sie diese Grammatik so, dass keine führenden Nullen (wie z.B. 040) möglich sind, und außerdem Variablenbezeichner a, \dots, z zugelassen sind. Begründen Sie anschließend, weshalb Ihre Grammatik das Gewünschte leistet.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Für zwei Wörter $u, v \in \Sigma^*$ ist $|uv| = |u| + |v|$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mit vollständiger Induktion:

1. Für ein beliebiges Wort $w \in \Sigma^*$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|w^n| = n \cdot |w|$.
2. In jedem Ableitungsschritt der Grammatik G_1 aus der vorherigen Aufgabe 2 gibt es genau so viele öffnende wie schließende Klammern.

Aufgabe 4: (4 Punkte) *Palindrome* sind Wörter, die vorwärts wie rückwärts gelesen gleich aussehen. Dies sind zum Beispiel die Wörter *otto*, *radar*, *regelbasisableger*, *lagertonnennotregal*; *informatik* ist kein Palindrom.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G_1 = (V, \Sigma, P_1, S_1)$ an, welche solche Wörter erzeugen kann. Zeigen Sie anschließend, dass Ihre Grammatik G_1 obige Wörter erzeugt und außerdem allgemein jegliche Palindrome erzeugen kann.

Aufgabe 5: (3 Punkte) Gegeben sei die folgende Grammatik

$$G_2 = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow abS \mid bS \mid baS \mid \varepsilon\}, S).$$

Zeigen Sie, dass G_2 kein Wort erzeugen kann, das *aaa* enthält.